UNIVERSITY OF SOUTHERN DENMARK

Masteruddannelse i Matematik

Jessica Carter

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet

21. november, 2018

DMUK

Indledning

Forskellige kilder peger på, at der mangler kvalificerede undervisere til at varetage matematikundervisningen i gymnasieskolen.

Fire universiteter (KU, SDU, AAU, AU) er derfor gået sammen om at udvikle og udbyde en *Masteruddannelse i Matematik med henblik på undervisning ved de gymnasiale uddannelser*.

I dag vil jeg fortælle om

1. Tallene: Hvad vi ved om manglen på matematiklærere i gymnasieskolen.
2. Lidt om selve uddannelsen: indhold og undervisning
3. Hvad skal der til, for at man kan undervise i matematik?
4. Diskussion

Oversigt over undersøgelser

Undersøgelser viser, at der klart er en mangel på undervisere, der opfylder de faglige mindstekrav i matematik.

Følgende understøtter denne påstand:

1. Beskæftigelsesundersøgelse fra Danske Gymnasier (DG) fra 2011-2015.
2. Behovsundersøgelse i forbindelse med ansøgning om oprettelse af Masteruddannelsen:
   - Breve fra DG.
   - Brev fra Danske Erhvervsgymnasier (DEG)
   - Brev fra Matematiklærerforeningen
   - Brev fra fagkonsulenterne ved UVM
   - En spørgeskemaundersøgelse til samtlige gymnasieskoler

Nogle konklusioner

- Behovet er især i de mindre byer — ikke omkring universitetsbyerne(?!).
- Forskellige faktorer spiller ind: "Efterslæb", lærernes overenskomst, omprioriteringsbidraget og den seneste gymnasiereform.

Nogle konklusioner

- Behovet er især i de mindre byer — ikke omkring universitetsbyerne(?!).
- Forskellige faktorer spiller ind: "Efterslæb", lærernes overenskomst, omprioriteringsbidraget og den seneste gymnasiereform.
- I spørgeskemaundersøgelsen svarer 37 ud af 136 gymnasieskoler (27%), at de har udfordringer med at ansætte kvalificerede undervisere.

  I alt sendt til 292 skoler; fordelt over EUX, HHX, HTX, STX.

Hvorfor dette initiativ?

- Der er et behov for (efter)uddannelse af flere matematiklærere.
- Det er muligt via **tompladsordning** — men denne er uoverskuelig: hvilke fag skal man tage for at opfylde kravene?
- Det er muligt via tompladsordning — men denne er vanskelig, hvis man allerede underviser: undervisningen er tilrettelagt efter fuldtidsstuderende.
- Ved at de fire universiteter går sammen om uddannelsen, sikres et ensartet tilbud uanset hvor i landet man kommer fra, og det giver (forhåbentlig) et rentabelt volumen.
- Kurserne i uddannelsen udvikles med henblik på masteruddannelsen. Både i forhold til indhold og undervisningsformer: disse tager hensyn til at studerende kan have arbejde ved siden af.
- Vi stiller nogle krav om optagelse, som sikrer at kandidater vil opfylde de faglige mindstekrav.

Indhold

Fra Studieordningen

Masteruddannelsen i matematik er opbygget med henblik på at give kandidater med et andet fag end matematik de nødvendige kompetencer til at kunne undervise i matematik på de gymnasiale uddannelser. Udover de faglige kompetencer, som er angivet i de faglige mindstekrav, indeholder modulerne forskellige perspektiver relevant for gymnasieundervisningen i matematik. De forskellige perspektiver inkluderer stofdidaktik, hvorledes IT meningsfuldt integreres i undervisningen og fagsamspil og modellering. Undervejs møder den masterstuderende undervisningsmetoder, der afspejler den kommende lærergerning og som skaber sammenhæng mellem universitetsmatematikken og gymnasiematematikken.

Indhold i Masteruddannelsen

Indgangskrav er 60 ECTS matematik - og derefter skal de have følgende:

1. semester	Matematik som undervisningsfag (KU)	Diskret Matematik (KU)	Analyse 1 (AU)
2. semester	Statistik og sandsynlighedsteori (AAU)	Algebra 1 (AU)	Geometri 1 (AAU)
3. semester	Videnskabsteori og historie (KU/SDU)	Analyse/Algebra/Geometri/Diskret matematik/Statistik og Sandsynlighedsteori 2 (Alle)	Dynamiske systemer og fagsamspil (SDU)
4. semester	Masteropgave		
farvekode	Did & Vid	Kerne	Dybde

Erfaringer indtil nu

- Der har været en stor interesse for uddannelsen! Ca. 70 har henvendt sig.
- Men i sidste ende var der kun få, der søgte og opfyldte adgangskravene.
- Vi har optaget en gruppe på 17 studerende. (Nogle følger dog kun et enkelt modul.)
- En stor udfordring er, at de ikke får bevilget tid til at gennemføre uddannelsen.
- Vi håber på flere kvalificerede ansøgere til E19!

Hvad skal der til for at man kan undervise i matematik?

Officielt: Opfyldelse af de faglige mindstekrav i matematik!
Dvs. 120 ECTS matematik, inklusive anvendelser af matematik.

Jeg mødes dog ofte med en undren over, at der skal så meget matematik til for at kunne undervise i gymnasieskolen.

En ingeniør eller økonom, som har haft noget Differential- og integralregning, Matrixregning ("lineær algebra") og noget Statistik, som jo dækker (det meste af) det som skal undervises i i gymnasieskolen, burde vel være godt klædt på?!

Hvad skal der til for at man kan undervise i matematik?

Officielt: Opfyldelse af de faglige mindstekrav i matematik!
Dvs. 120 ECTS matematik, inklusive anvendelser af matematik.

Jeg mødes dog ofte med en undren over, at der skal så meget matematik til for at kunne undervise i gymnasieskolen.

En ingeniør eller økonom, som har haft noget Differential- og integralregning, Matrixregning ("lineær algebra") og noget Statistik, som jo dækker (det meste af) det som skal undervises i i gymnasieskolen, burde vel være godt klædt på?!

Hvorfor er det ikke tilstrækkeligt??

Hvad skal der til for at man kan undervise i matematik? — De nemme

1. Det dækker ikke **de faglige mindstekrav!**

Hvad skal der til for at man kan undervise i matematik? — De nemme

1. Det dækker ikke **de faglige mindstekrav!**
2. **Det store overblik:** Matematik indeholder meget mere end de emner, fx geometri, topologi, algebra, kompleks analyse...
3. **Metoder**. I andre uddannelser er der mest fokus på anvendelser: ikke den matematiske teori-bygning, ræsonnement, den logiske opbygning, etc.
4. Én styrke ved matematikken er netop at man lærer at tænke logisk, struktureret og abstrakt.
5. En lærer skal kunne vejlede om fremtidigt studievalg — og derfor vide hvad et matematikstudium indebærer.
6. Undervisningen skal forberede til evt. studie i matematik.
7. Vi skal have flere elever til at vælge en fremtid indenfor STEM-fagene.
8. Man skal have prøvet at "slå"sig lidt på matematikken(!!)

Hvad skal der til for at man kan undervise i matematik?

Og så et lidt mere detaljeret bud:

Jeg tager udgangspunkt i det man vel oftest betegner som *symbol- og formalismekompetencen* — benyttet i fx reduktion og ligningsløsning.

Ved udførelse af disse kan man trække på forskellige billeder af matematikken:

> Matematik består af en samling regler, som skal læres udenad og huskes — og trænes hyppigt.
>
> Disse områder udnytter (karakteriserende) egenskaber ved tallene og lighedstegnet.

Min forventning er, at et studium i matematik svarende til opnåelse af de faglige mindstekrav, bør give kandidater det sidste billede.

Hvad skal der til for at man kan undervise i matematik?

I det følgende vil jeg specifikt se på hvad Algebra (og logik) kan bidrage med. Herved illustreres to overordnede påstande om matematik:

- Reduktion og ligningsløsning bygger på egenskaber ved tallene og lighedstegn *og* konventioner. Hvis man skal formidle matematik, er det vigtigt at kende forskel på disse.
- Matematik handler om at indse nødvendige sammenhænge. At kunne se disse, afhænger af benyttelse af og manipulation med velvalgt notation.

For at underbygge den første påstand skitserer jeg først hvordan lighedstegnet og tallene — specielt de naturlige tal — defineres.

Til sidst vil jeg uddybe den sidste påstand.

Lighedstegn

Når lighedstegnet introduceres i logik, har det følgende grundlæggende egenskaber:

1. For alle x gælder $x = x$.
2. Hvis $x = c$ medfører $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(c)$, hvor $\mathcal{F}$ betegner et vilkårligt funktionsudtryk.
3. Hvis $x = c$ gælder at $\mathcal{U}(x) \implies \mathcal{U}(c)$, hvor $\mathcal{U}$ betegner et vilkårligt udsagn.

Ligningsløsning og reduktion — Algebra

I algebra lærer man (bl.a.) om algebraiske strukturer som fx. ringe og legemer. Disse defineres som en mængde, $\mathbf{R}$, hvor der er defineret to operationer, $+, \cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
$(\mathbf{R}, +, \cdot)$ kan opfylde, at for alle $m, n, k \in \mathbf{R}$ gælder

- A $m + (n + k) = (m + n) + k, \quad m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$
- K $m + n = n + m, \quad m \cdot n = n \cdot m$
- N Der findes $0, 1 \in \mathbf{R}$, så
  $m + 0 = 0 + m = m, \quad m \cdot 1 = 1 \cdot m = m.$
- Ia For alle $m \in \mathbf{R}$ findes $-m \in \mathbf{R}$, så $m + (-m) = 0$,
- Im For alle $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ findes $m^{-1} \in \mathbf{R}$, så $m \cdot m^{-1} = 1$.
- D $m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k$ og $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$.

Hvis $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ opfylder alle disse, kaldes det et legeme. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ og $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ er legemer. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ er ikke, men opfylder A, K, N, Ia og D.

Ligningsløsning og reduktion — Algebra

Når man manipulerer med (symboler for tallene), benytter man således ovenstående egenskaber. Men hvorfor *har* tallene disse egenskaber?

Man kan definere tallene — startende med de Naturlige tal — ud fra nogle få egenskaber. Og derefter *udlede* disse egenskaber.

Der er forskellige måder at karakterisere de Naturlige tal. Jeg viser et par stykker...

Axiomatisering af de naturlige tal — (Dedekind, Peirce) Peanos axiomer

Her er givet to 'primitive' størrelser, en konstant, '0' og en funktion, kaldt efterføgerfunktionen, her betegnet ved s. Disse opfylder følgende egenskaber:

- 0 er et naturligt tal;
- Hvis n er et naturligt tal, så er dens efterfølger $s(n)$ også;
- 0 er ikke efterfølger af noget tal;
- Hvis $s(n) = s(m)$, så er $n = m$;
- For alle x, $(x + 0 = x)$;
- For alle x, y, $(x + s(y) = s(x + y))$;
- For alle x, $(x \times 0) = 0$;
- For alle x, y, $(x \times s(y) = x \times y + x)$;
- Lad P være en egenskab for naturlige tal. Hvis 0 har P, og hvis $s(n)$ altid har egenskaben, når n har P, så gælder P for alle naturlige tal.

Axiomatisering af de naturlige tal — Som en totalt ordnet mængde

En af de første definitioner af de naturlige tal (af C.S. Peirce) var som en **totalt ordnet mængde** (dvs. relationen defineret på mængden er transitiv, refleksiv og anti symmetrisk og opfylder, at ethvert par af elementer er sammenlignelige).

Mængden skal endvidere opfylde, at den er "diskret", har et første element og opfylder Induktion.

Man kan definere addition og multiplikation på en sådan mængde.

Det er muligt, at definere en ordensrelation på mængden karakteriseret af Peanos axiomer — og at de to har samme egenskaber.

Naturlige tal — kategori teori

I kategori-teori kan man definere 'et naturligt talobjekt' som en struktur på formen

$$1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{s} N$$

sådan at for vilkårlig $1 \xrightarrow{a} X \xrightarrow{g} X$ i kategorien er der en entydig bestemt pil $f : N \to X$ så følgende kommuterer:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[d, "f"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "a"'] & & \\ & X \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

Egenskaber ved de naturlige tal

Hvis man tager udgangspunkt i disse karakteriseringer af de naturlige tal, kan man ved induktionsaxiomet **udlede** regnereglerne, vi så før.

Jeg viser her hvordan den kommutative regel for addition bevises. (Under antagelse at den associative regel er udledt.)

Vi udleder først at $x + 1 = 1 + x$ for alle $x \in \mathbb{N}$.

Det er klart at $1 + 1 = 1 + 1$. Antag nu at $1 + x = x + 1$, vi viser at $1 + (x + 1) = (x + 1) + 1$:

$$1 + (x + 1) = (1 + x) + 1 = (x + 1) + 1$$

Herved konkluderes at $x + 1 = 1 + x$ for alle $x \in \mathbb{N}$.

Egenskaber ved de naturlige tal

I næste trin viser vi, at $m + n = n + m$ for alle $m, n \in \mathbb{N}$.

Antag nu at $x + y = y + x$. Vi viser at $x + (y + 1) = (y + 1) + x$:

$$\begin{aligned} x + (y + 1) &= (x + y) + 1 \\ = (y + x) + 1 &= y + (x + 1) \\ = y + (1 + x) &= (y + 1) + x \end{aligned}$$

Ved at benytte induktionsaxiomet ses at egenskaben gælder for alle naturlige tal.

Konklusion — første pointe

Der er flere forskellige måder at axiomatisere de naturlige tal. Fx. som en totalt ordnet mængde, der opfylder Induktion, ved Peano's axiomer, via kategori-teori (eller som den positive del af ringen bestående af de hele tal).

Når man har lagt sig fast på én af disse, følger de forskellige egenskaber for operationerne '$+$' og '$\cdot$'. Man kan fx udlede at den kommutative regel gælder, ligesom andre også kan bevises.

De operationer, vi udfører ved ligningsløsning og reduktion, er således ikke bare konventioner og regler.

- Nogle af disse kommer fra karakteriserende egenskaber for tallene. Eller udledes af egenskaber ved tallene.
- Andre udnytter egenskaber ved lighedstegnet.

Konklusion — første pointe

Og så er der selvfølgelig konventioner!

- Det er en konvention, at vi benytter '$=$' for lighedstegn, '$\cdot$' for gange, osv.
- Det er også en konvention at vi fx. skriver a^3 i stedet for $a \cdot a \cdot a$.

Det er vigtigt, at vide hvor reglerne kommer fra: om det er egenskaber ved det genstandsområde man behandler — eller konventioner!

Og så har jeg antydet, at der er forskellige måder at "strukturere"disse egenskaber, dvs. hvilke som vælges som grundlæggende og hvilke, der kan udledes heraf.

Min anden pointe

Jeg vil desuden pege på, at **matematik handler om at ind*se* nødvendige sammenhænge. Dette afhænger af benyttelse, og manipulation, af velvalgt notation.**

Min anden pointe

Jeg vil desuden pege på, at **matematik handler om at ind*se* nødvendige sammenhænge. Dette afhænger af benyttelse, og manipulation, af velvalgt notation.**

Vi har faktisk allerede set eksempler på dette!

Et andet eksempel er sætningen: Kvadratet på et ulige tal er et ulige tal. Men for at I også kan se at sammenhængen gælder, kræves

- En repræsentation, eller notation, som afspejler hvad det vil sige at være et ulige tal, m.a.o. indfanger relevant struktur for ulige tal.
- At denne repræsentation kan manipuleres med,
- således at der produceres et tegn, hvoraf den nødvendige sammenhæng kan aflæses.

Min anden pointe

En velegnet repræsentation af et ulige tal er $2 \cdot k + 1$, for $k \in \mathbb{Z}$.

Den nødvendige sammenhæng indses ved følgende (vi benytter en af kvadratsætningerne...)

$$(2 \cdot k + 1)^2 = 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1.$$

Notationen (eller "symbolerne") er ikke blot noget vi manipulerer med efter forudbestemte regler — det er et nyttigt værktøj til at opnå matematisk indsigt.

Konklusion

Der er mange begrundelser for, at det er nødvendigt at lære en del avanceret matematik for at kunne undervise i gymnasieskolen.

Jeg har her specifikt set på hvad man (forhåbentlig) kan få ud af abstrakt algebra.

- For det første at ligningsløsning og reduktion ikke bare handler om at bruge en masse regler, som skal læres udenad.
- Reglerne følger fx af hvordan man definerer (de naturlige) tal.
- Man skal lære **nogle** af disse regler — men så kan resten udledes.

Konklusion

Der er mange begrundelser for, at det er nødvendigt at lære en del avanceret matematik for at kunne undervise i gymnasieskolen.

Jeg har her specifikt set på hvad man (forhåbentlig) kan få ud af abstrakt algebra.

- For det første at ligningsløsning og reduktion ikke bare handler om at bruge en masse regler, som skal læres udenad.
- Reglerne følger fx af hvordan man definerer (de naturlige) tal.
- Man skal lære **nogle** af disse regler — men så kan resten udledes.
- Matematik handler således også om ræsonnement.
- Jeg har også antydet, at den matematiske notation er et vigtigt redskab. (Og at det måske burde dyrkes mere...)

Diskussion