Opgavedesign som matematikdidaktisk problemfelt

Carl Winsløw, Københavns Universitet
winslow@ind.ku.dk

Introduktion

"Opgaver" (i bred forstand) har to væsentlige funktioner ift matematikundervisning:

Formativ: man kan lære matematik af at løse opgaver

→ opgaver som undervisningsredskab

Summativ: man kan vise at man kan matematik ved at løse opgaver

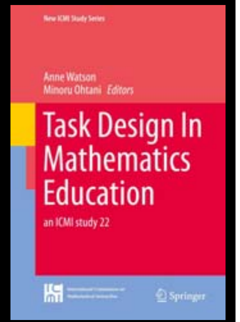
→ opgaver som evalueringsredskab

Alignment: sammenhæng ml. ovst. funktioner

I dag:

1. Formativt opgavedesign og Matematikdidaktikkens Inversproblem
2. Summativt opgavedesign og alignment
3. En teoretisk rammesætning

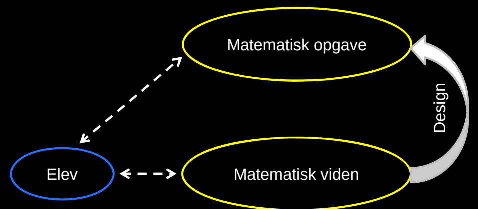
Anbefalet læsning:



2015

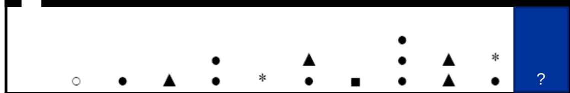
Design af formative opgaver

At designe opgaver, som nogen kan lære noget af at løse



Matematikdidaktikkens inversproblem (Brousseau, 1981)

Et budskab fra rummet…



Diskussion med sidemand (5 minutter):

1. Hvad står der?

2. Hvis I kan læse ovst.: kan I også fortsætte budskabet?

Er ovst. matematikopgaver?

Matematisk viden « gemt » i opgaven

Definition : Et naturligt tal *n* er et primtal hvis kun 1 og *n* går op i *n.*

fx. 2,3,5,7,11,13,17,19,…

… i sammenhæng med essensen af:

Aritmetikkens Fundamentalsætning: alle nat. tal kan skrives som produkt af primtal

fx. 4=2·2, 6=2·3, 12=2·2·3, …

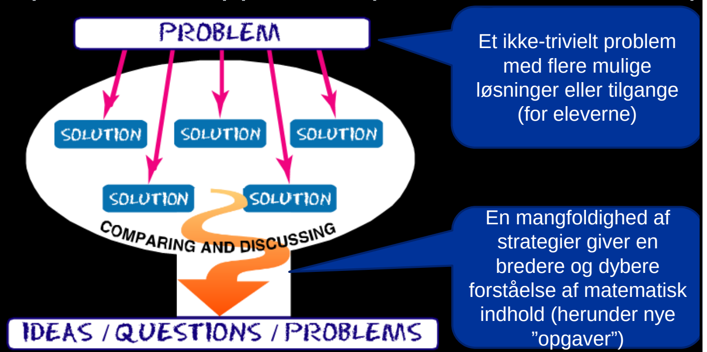
og bortset fra rækkefølgen er der kun én måde at gøre det på.

Så er der film!

Notere (til efterflg. diskussion):

- Hvordan formidler læreren ”opgaven”?
- Hvilke ”valg” (*didaktiske variable*) ser ud til at være afgørende for elevernes udbytte (udvikling af den nævnte viden)?

”Open ended approach” (Nohda et al., 1960→)



Pointe: eleverne lærer matematik som rationelle løsninger på en opgave

Essentielle faser i problemløsning (Brousseau)

- Handling: prøv med nogle specialtilfælde
  - Matematiske eksperimenter
- Formulering: hvad lægger I mærke til?
  - Matematiske hypoteser
  - Generalisering
- Validering: er hypoteserne sande?
  - Matematiske ræsonnementer, beviser
  - Modeksempler

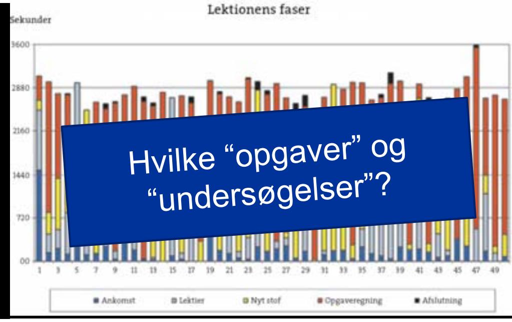
En lektions "drejebog" (Stigler, 1997)

USA:
- Læreren introducerer en opgavetype og en teknik
- Nogle eksempler gennemgås på klassen (typisk af læreren)
- Eleverne arbejder individuelt med opgaver af denne type; læreren tilkaldes af eleverne når/hvis der opstår vanskeligheder

Japan:
- Læreren introducerer et åbent problem (*hatsumon*)
- Eleverne arbejder med problemet, læreren observerer deres arbejde (*kikan-shido*)
- Eleverne præsenterer deres ideer eller løsninger [~*takuto*]
- Disse diskuteres på klassen og af læreren (*neriage*)
- Læreren konkluderer (*matome*)

Og i Danmark… (Mogensen, 2011)

1. **Ankomst** (inkl. beskeder).
2. **Lektier** (inkl. rettearbejde og returnering af opgaver eller prøver)
3. **Nyt stof** (inkl. repetition af tidligere lært)
4. **Opgaveregning** eller elevstyrede undersøgelser
5. **Opsummering** (inkl. afslutning og beskeder).



En anden opgave om primtal

6 Kast to terninger
Læg øjnene sammen.
Hvad er sandsynligheden for at få
- **a** et lige tal?
- **b** et ulige tal?
- **c** et kvadrattal?
- **d** et primtal?
- **e** et tal større end 1?

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

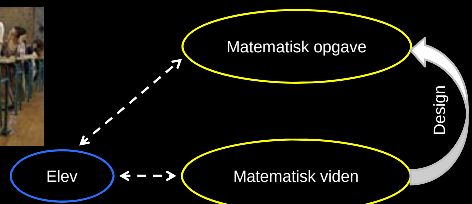
Et primtal er et tal som kun 1 og tallet selv går op i, og som har netop to divisorer: 2, 3, 5, 7, 11 ...

(Matematiktak for syvende, s. 51)

Hvad kan man lære af denne opgave? Om primtal?

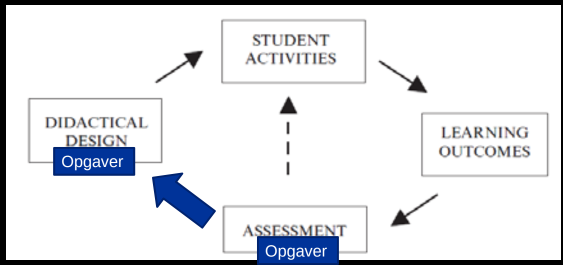
Design af summative opgaver

At designe opgaver, som afdækker hvad nogen kan/ved om/med noget



Designproblemet ligner, men der er andre randbetingelser (fx tid, fravær af lærer, forudgående undervisning)

Tilbagevirkningseffekten



Grønbæk, Misfeldt, W., 2009

Alignment mellem undervisning og eksamen: specielt mellem opgaverne

Matematikudredningen

I lærerundersøgelsen skriver en respondent, at "man skal som lærer være idealistisk for at holde fanen højt og undervise sine elever, så de bliver gode til matematik, når eleverne kan klare sig lige så godt til eksamen ved en undervisning, der er fokuseret på CAS-kommandoer og modelbesvarelser" (matematiklærer på STX). En modelbesvarelse eller skabelonbesvarelse vil sige, at eleverne medbringer forskellige former for opskrifter på, hvordan typeopgaver skal besvares, typisk under brug af et matematikværktøjsprogram. (...)
53% af respondenterne i lærerundersøgelsen siger, at de er splittede mellem at forberede elever til skriftlig eksamen og samtidig arbejde begrebsorienteret. (...)
Presset fra eksamen øges for lærerne af, at deres arbejde i et vist omfang evalueres på basis af elevernes karakterer: 51% af respondenterne i rektorundersøgelsen siger, at de bl.a. bruger de skriftlige eksamens-karakterer til at vurdere kvaliteten af den enkelte lærers arbejde.

(Jessen, Holm, W., 2015)

Hypoteser

- Hvis elever skal lære at løse et mindre antal standardopgaver, er det letteste at tage dem en for en: gennemgå metoden, og så træne den i en vis variation af sammenhænge, som går igen til eksamen
- Hvis eleverne skal lære at løse opgaver, de ikke har set før (rationel kreativitet), skal der designes en større variation af opgaver, og nye sammenhænge skal også i betydeligt omfang optræde ved eksamen

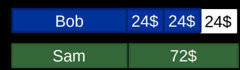
Singapores Matematikreform

- Singapore Math (1992→): læreplan for grundskolen (1.-6. klasse) baseret på problemløsning, med stærk fokus på metode-åbne problemer, visualisering og kommunikation.
- National eksamen efter 6. klasse karakteriseret ved opgaver som er "uforudsigelige" som udvikles af en opgavekommission (SEAB) bestående af anonyme specialister. (Mere inviklet for secondary…)

Ex. (PSLE, efter 6. kl.): Sam får 3$ mere i lommepenge end Bob hver uge. De bruger begge 15$ om ugen, og sparer resten op. Når Sam har sparet 72$ op, har Bob kun sparet 48$ op. Hvad får Bob i lommepenge?

Udregning:
(72-48)/3$=8
8 uger…
Bob får
15$ + 48$/8
= 21$ om ugen

Visualisering:



24$ er 8 gange 3$
Bob får 15$+3$+3$=21$

Algebra:

$$\begin{cases} S - B = 3 \\ Sx = 15x+72 \\ Bx = 15x+48 \end{cases}$$

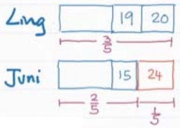
$3x = Sx–Bx = 24 \Rightarrow x=8$
$8B = 168 \Rightarrow B=21$

Endnu et eksempel…

Ling and Juni made greeting cards over two days. On Saturday, Ling made 19 cards more than Juni. On Sunday, Ling made another 20 cards and Juni made another 15. At the end of the two days, Ling made $\frac{3}{5}$ of the total number of cards. What was the number of cards Juni made?

calculate ? diagram ? algebra ?

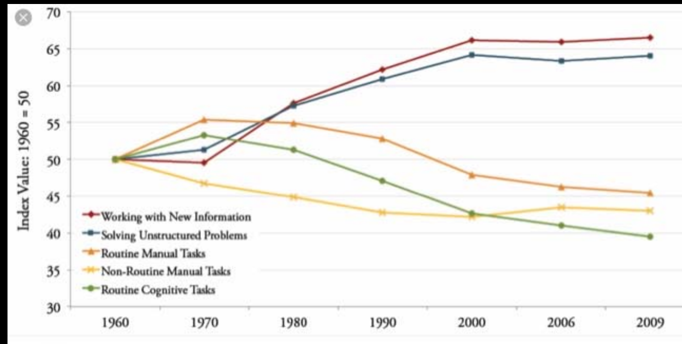
$19+20=39$
$39-15=24$
$24\times 2=48$
Juni made 48



Juni $x+15$
Ling $x+19+20$

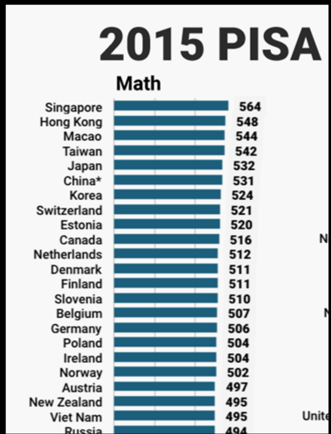
$$x+39=\frac{3}{5}[2x+54]$$
$$5x+195=6x+162$$
$$x=33$$
$$x+15=33+15$$
$$=48$$

Hvorfor problemløsning?



www.thirdway.org
Dancing with Robots: Human Skills for Computerized Work - Third Way
Figure Index of Changing Work Tasks in the Economy 1960

Mest for politikere?



Og i gymnasiet?

Løs ligningerne

$$3x^2-5x+2=0 \qquad 1,\ 2/3$$
$$2x^2-5x+3=0 \qquad 1,\ 3/2$$

Hvad lægger du mærke til?

Gælder det generelt?

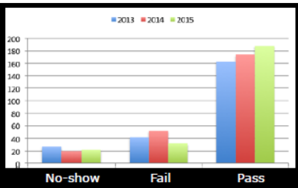
(Elever fra talentcamp.dk kunne også besvare det mere generelle spm. om n’te grads polynomier…)

Og på universitetet?

Opgave 5.2

Lad $n \geq 3$ og lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åben mængde, og lad f være en funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ med kontinuerte partielle afledte af alle ordner.

1. Gælder det, at
$$D_1 D_2 D_3 f = D_3 D_2 D_1 f \ ?$$
2. Brug dit svar på 1. til at formulere en mere generel hypotese om højereordens partielle afledte for f. Kan du bevise din hypotese?



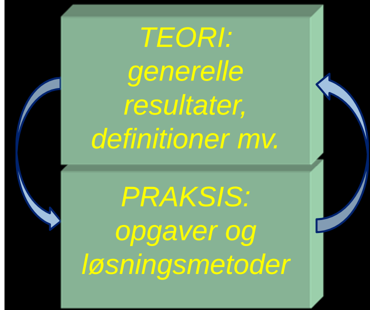
Pass rate:
2013: 70%
2014: 70%
2015: 78%

Pass grade average:
2013: 8,12
2014: 7,84
2015: 8,57

F-opgaver, An0, 2015
(Gravesen, Grønbæk, W)

Teoretisk perspektiv på opgavedesign

Matematisk viden består af *Praksis* og *Teori*



(Frit e. Chevallard, 1999)

DEDUKTIV TILGANG:
Præsenter først teori, og lav derefter typeopgaver som illustrerer den (og træner de teknikker den beskriver og begrunder)
Vi ved meget om opgavedesign og hvordan det virker!

INDUKTIV TILGANG:
Præsenter først opgaver, og lad dem generere teknikker, som efterflg. generaliseres, beskrives og begrundes teoretisk
Vi har endnu meget at lære om opgavedesign og hvordan det virker!